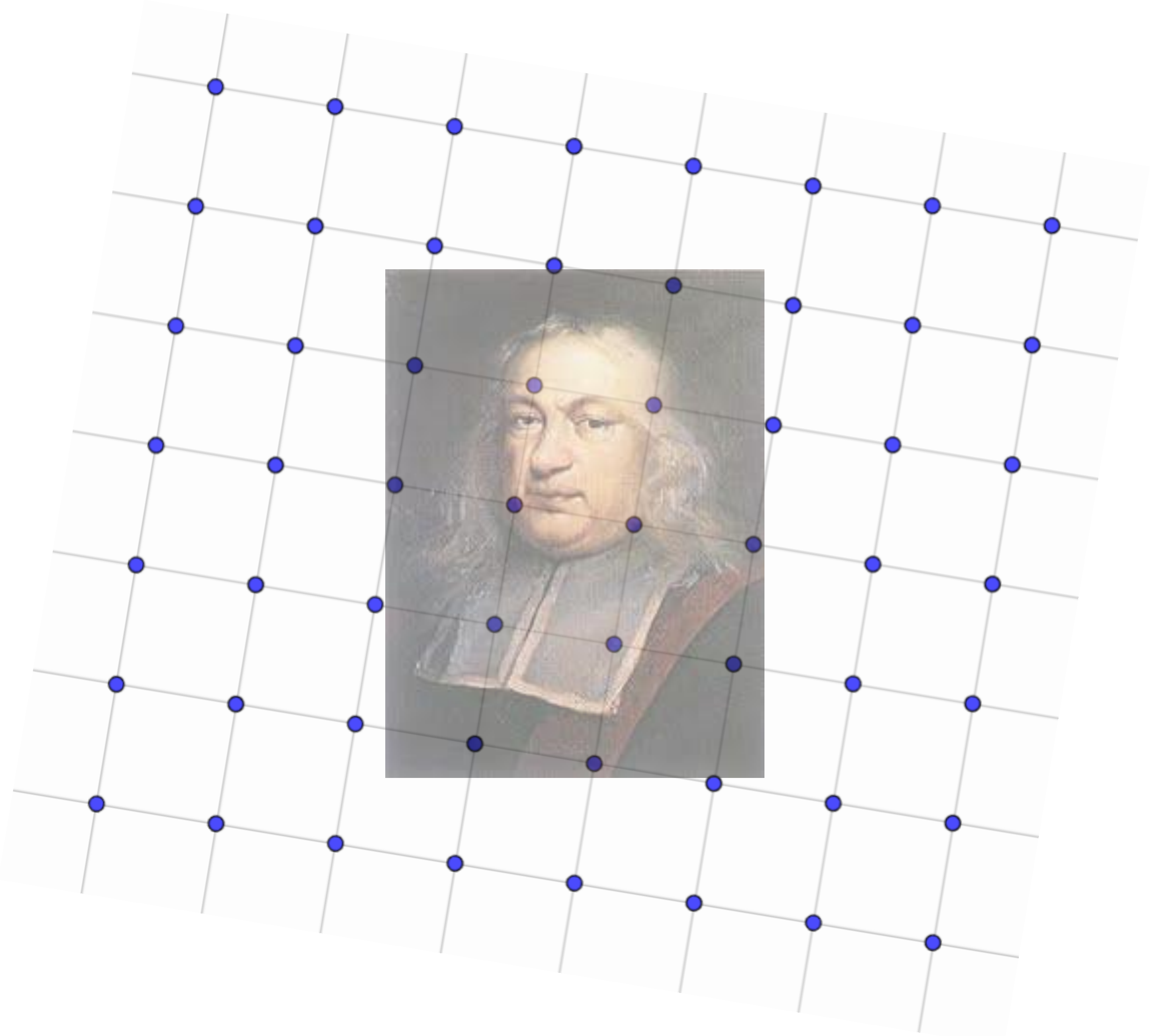
Réseaux : de Fermat à la cryptographie post-quantique

Séminaire de mathématiques de Ginette
mardi 24 janvier 2023

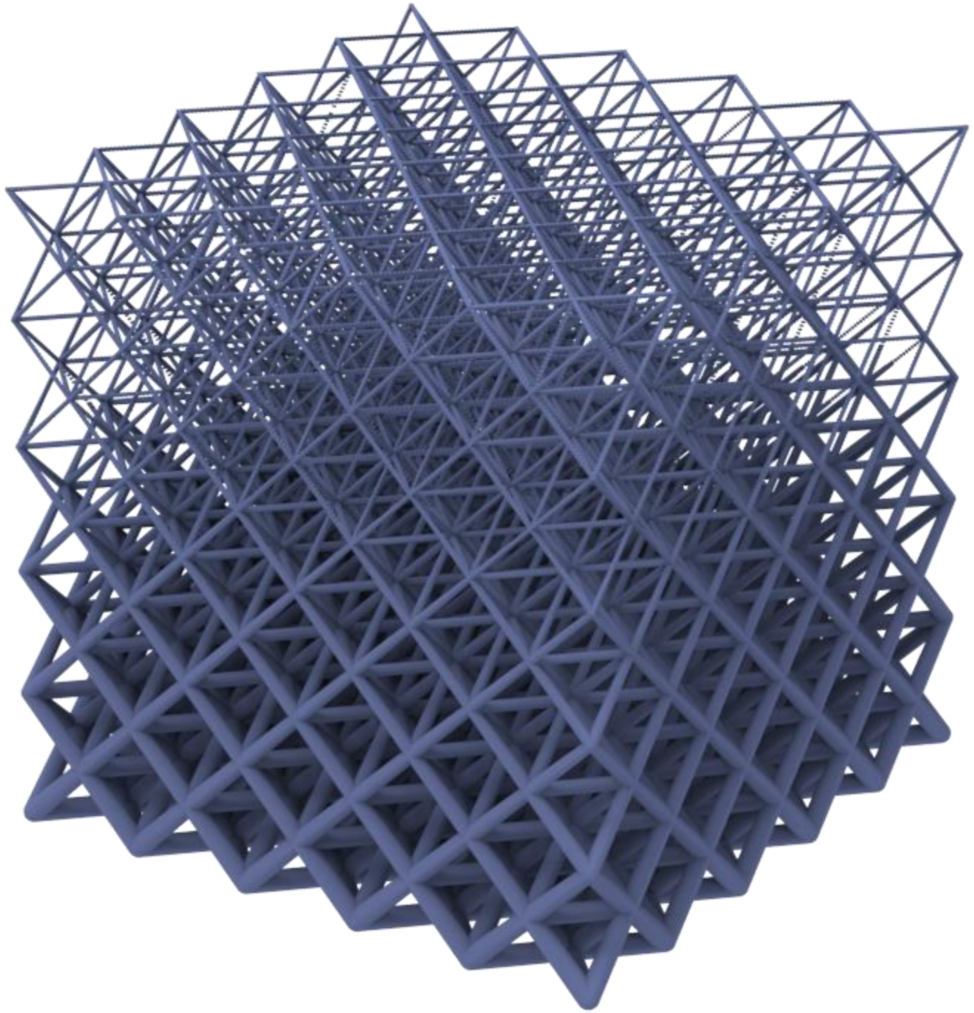
Henry Bambury (MPSI2 16-17/MP*1 17-18)
henry.bambury@ens.fr



C’est quoi un réseau ?

Les deux carrés de Fermat

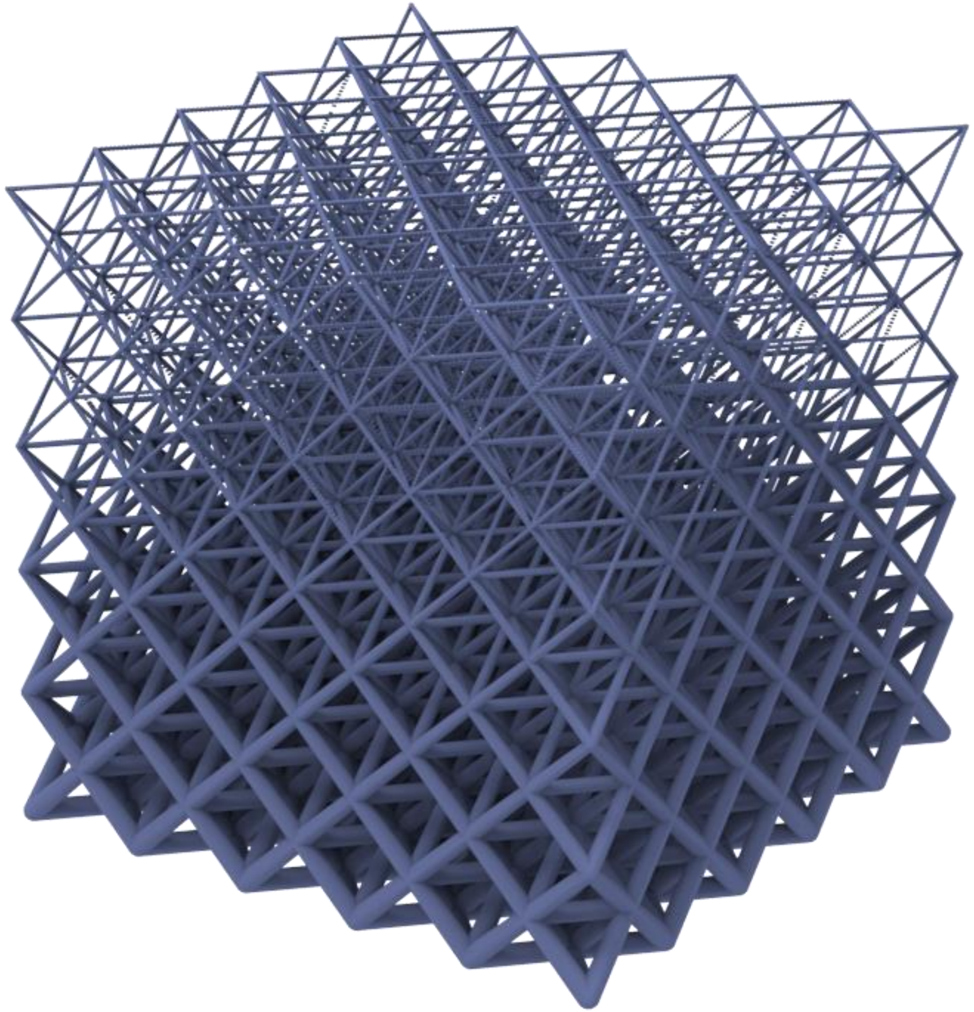
Application en cryptographie moderne



C’est quoi un réseau ?

Les deux carrés de Fermat

Application en cryptographie moderne



Réseaux : définition et premières propriétés

Soit $B = (b_1, \ldots, b_n)$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

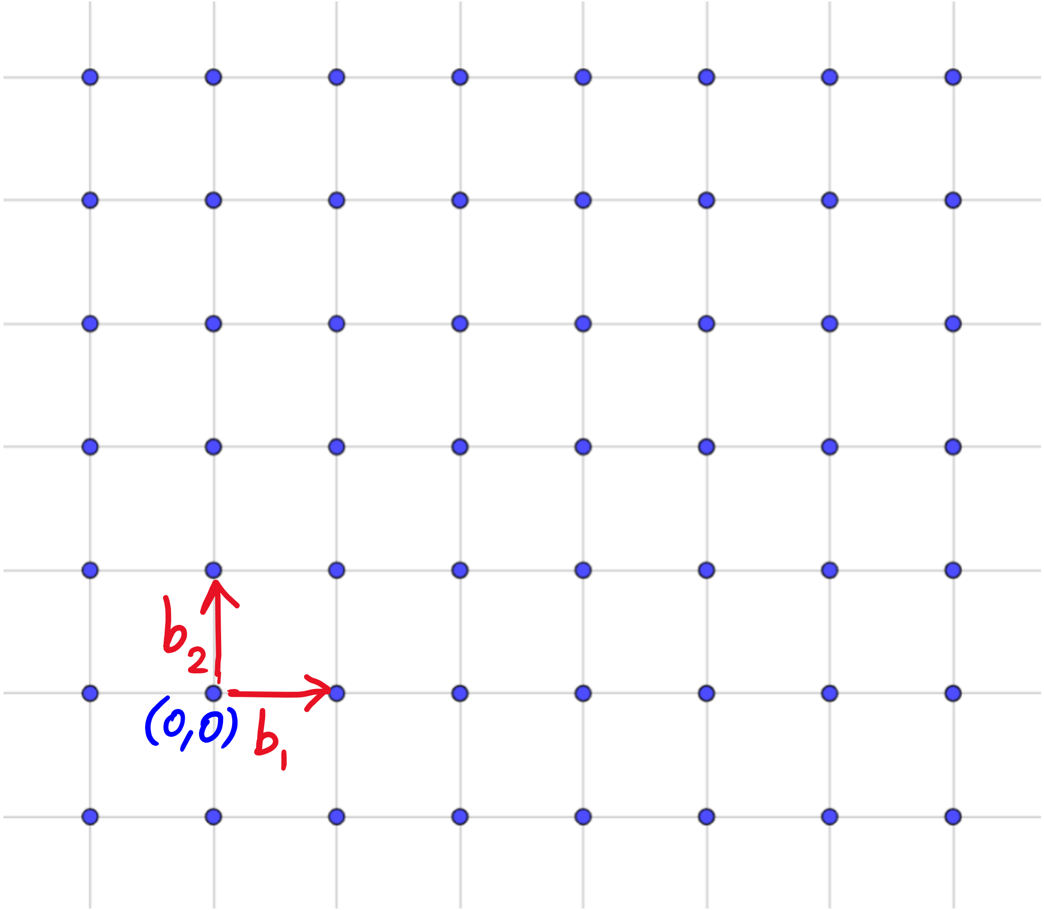
Définition (Réseau) :

$$\mathcal{L}(B) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i b_i | (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

Réseaux : définition et premières propriétés

$$\mathcal{L}(B) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \middle| (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

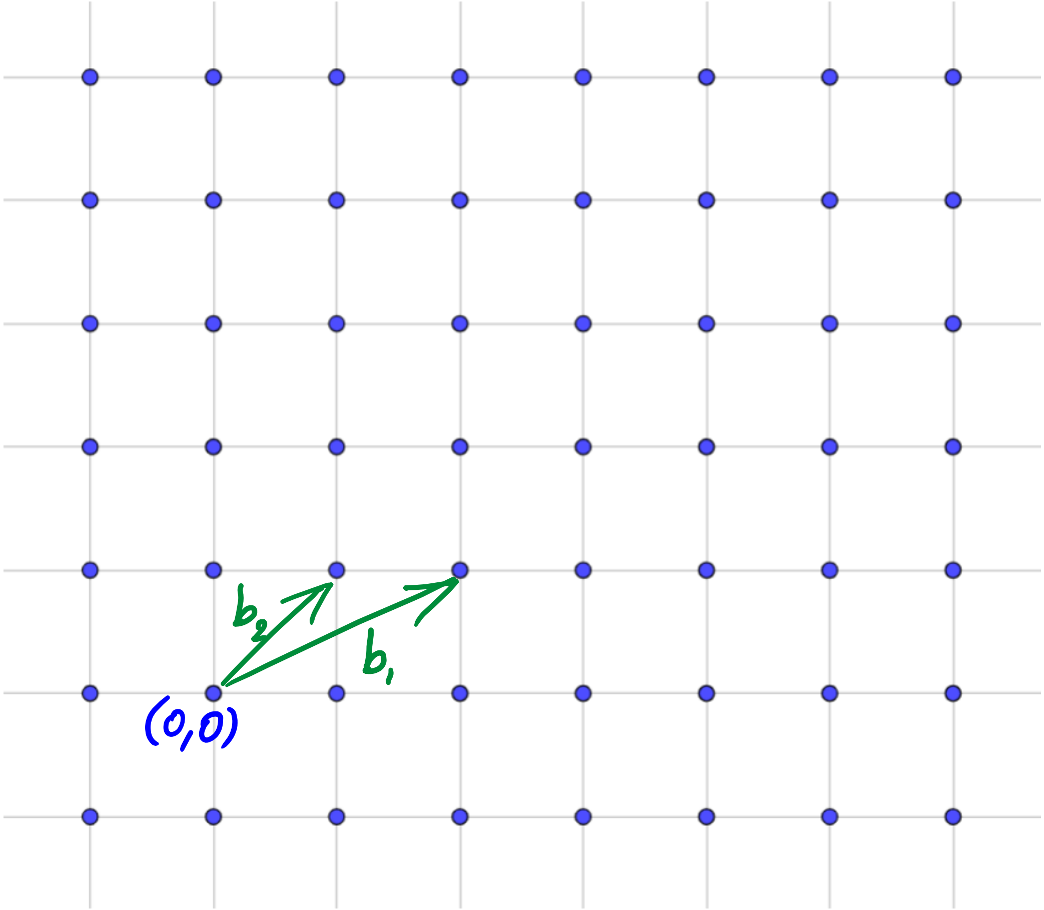
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Réseaux : définition et premières propriétés

$$\mathcal{L}(B) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \middle| (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

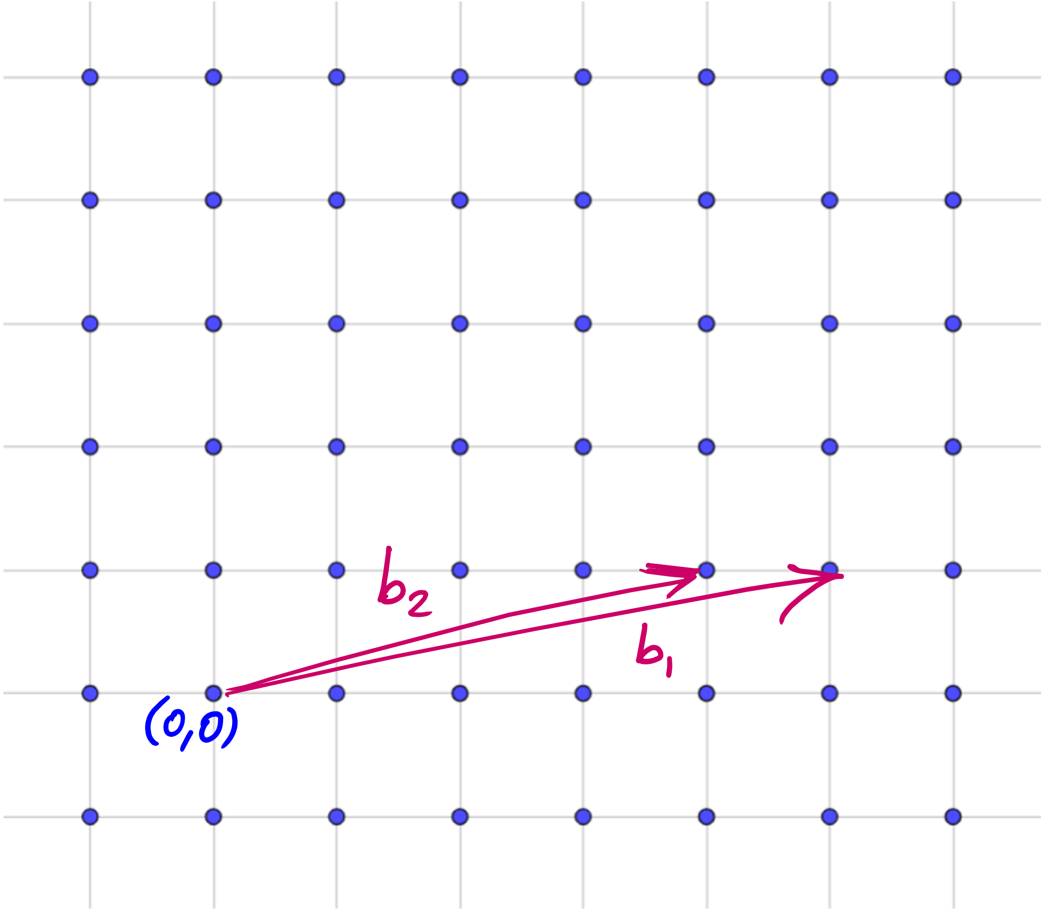
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Réseaux : définition et premières propriétés

$$\mathcal{L}(B) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i b_i | (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Réseaux : définition et premières propriétés

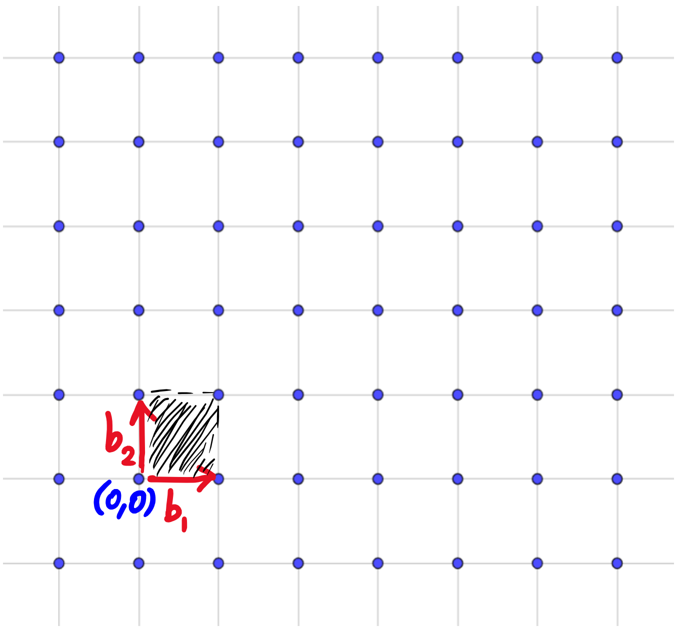
Proposition (Bases d'un réseau) :

$$\mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(C) \Leftrightarrow \exists U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) : B = CU$$

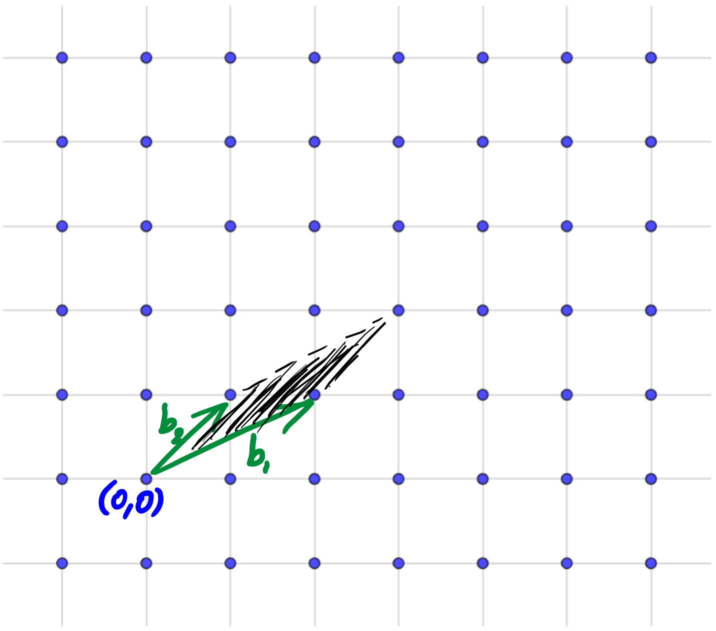
Définition (Volume) :

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{L}(B)) = |\det(B)|$$

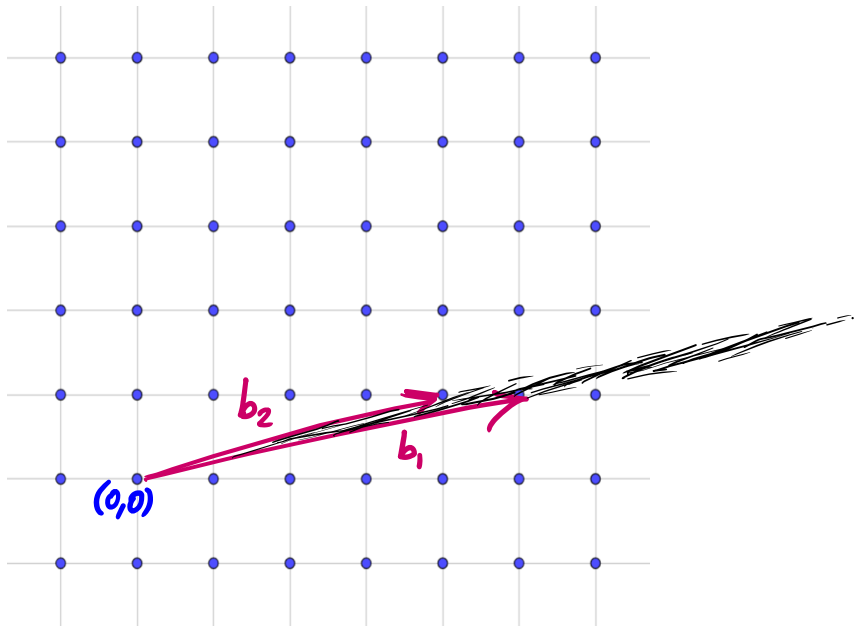
Réseaux : définition et premières propriétés



$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

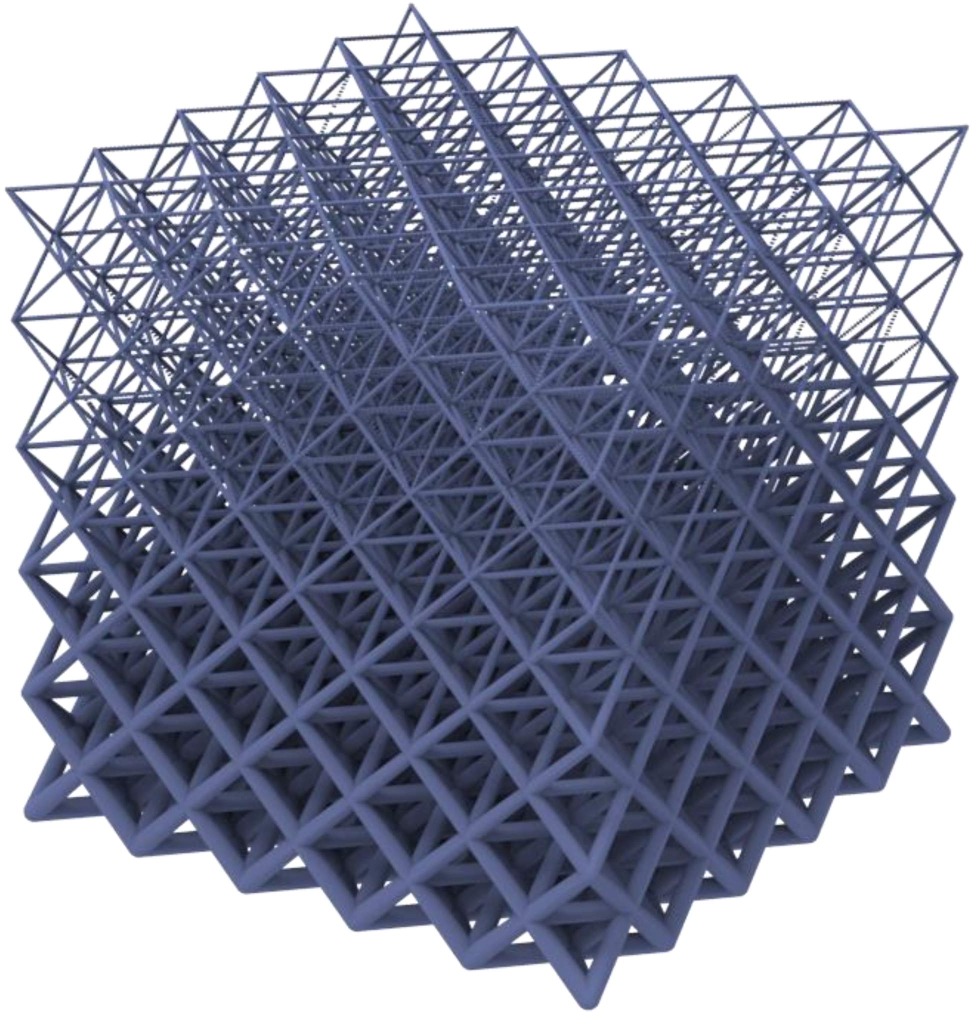


$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

C’est quoi un réseau ?

Les deux carrés de Fermat

Application en cryptographie moderne



Le théorème des deux carrés de Fermat

Théorème :

Soit p un nombre premier impair.

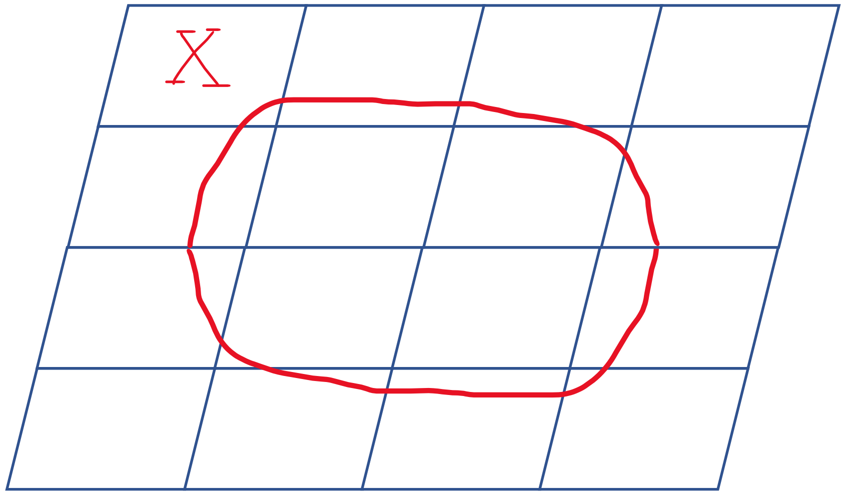
$$p \equiv 1 \bmod 4 \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2 : p = a^2 + b^2$$

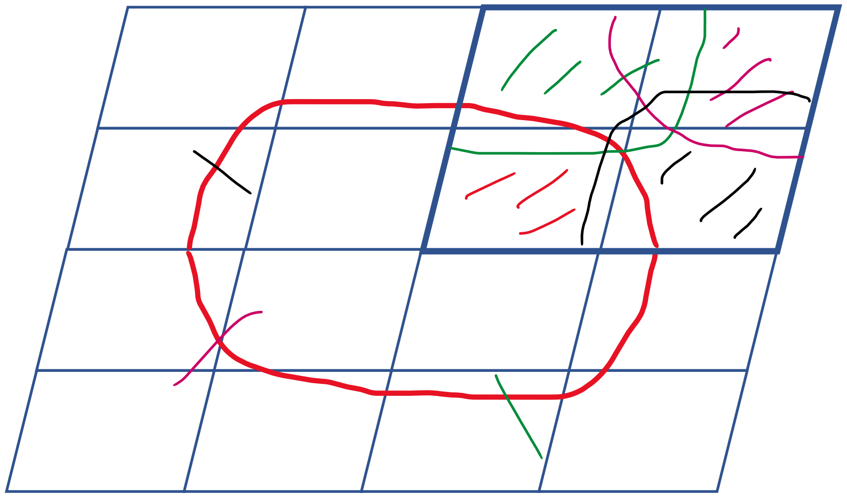
Le théorème des deux carrés de Fermat : preuve

Lemme (Minkowski) :

Soit $\mathcal{L}$ un réseau de rang 2 et $X \subset \mathbb{R}^2$ convexe et symétrique en 0. Alors

$$\mathcal{A}(X) > 4\mathrm{Vol}(\mathcal{L}) \Rightarrow X \cap \mathcal{L} \neq \{0\}$$





Le théorème des deux carrés de Fermat : preuve

Trouver $q \in \mathbb{Z}$ tel que $q^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

Considérer $\mathcal{L}(b_1, b_2)$ où $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}$ et $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$.

Conclure grâce au résultat de Minkowski.

$\square$

Le théorème des quatre carrés de Lagrange

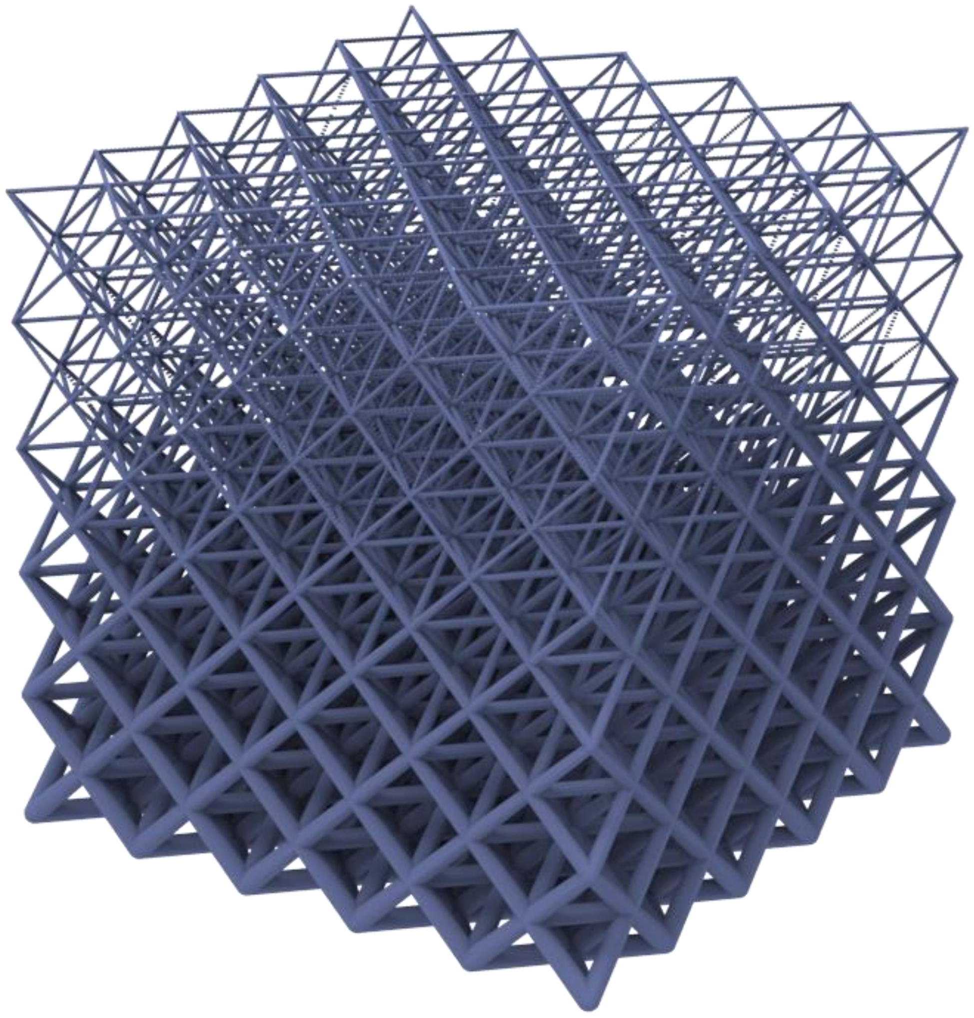
Théorème :

Tout entier positif peut se décomposer en une somme de quatre carrés d'entiers.

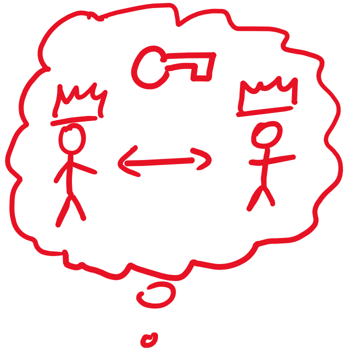
C’est quoi un réseau ?

Les deux carrés de Fermat

Application en cryptographie moderne



Une rapide histoire de la cryptologie



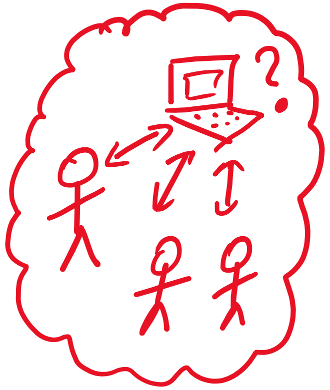
-3900 | -100 | 800 | 1570 | 1919 | 1942

Une rapide histoire de la cryptologie

Diffie

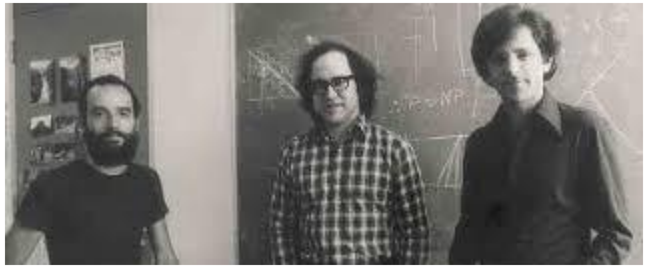
Hellman

1976*



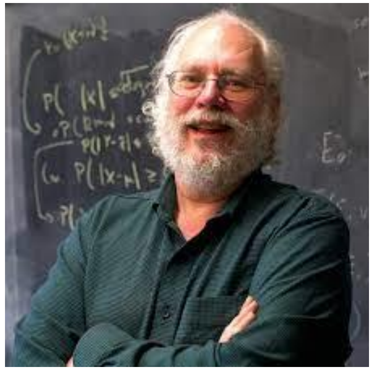
$n = p \times q$

1977

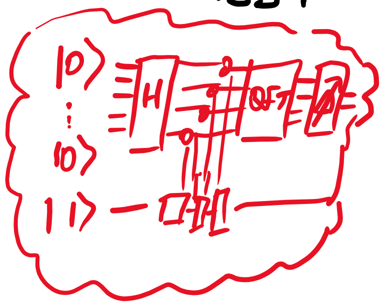


R S A

(...)



1994

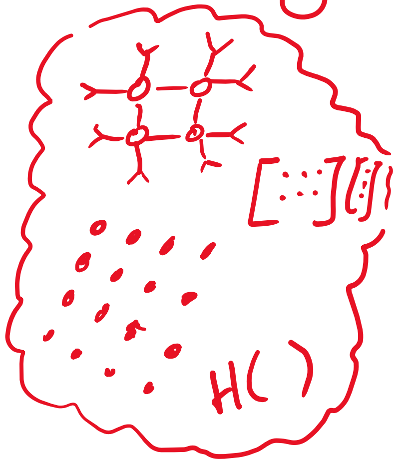


Post-Quantum

2006

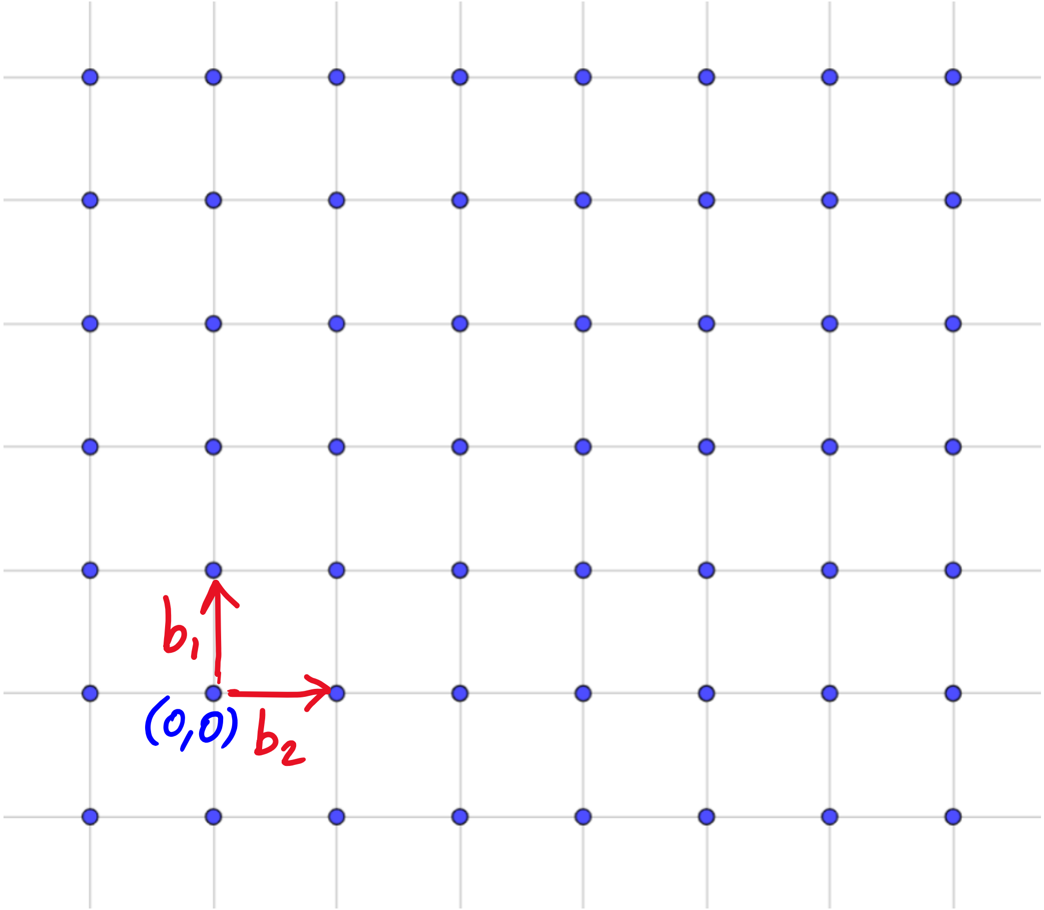
NIST

2017 +



Cryptographie à base de réseaux Euclidiens

$$\mathcal{L} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \middle| (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

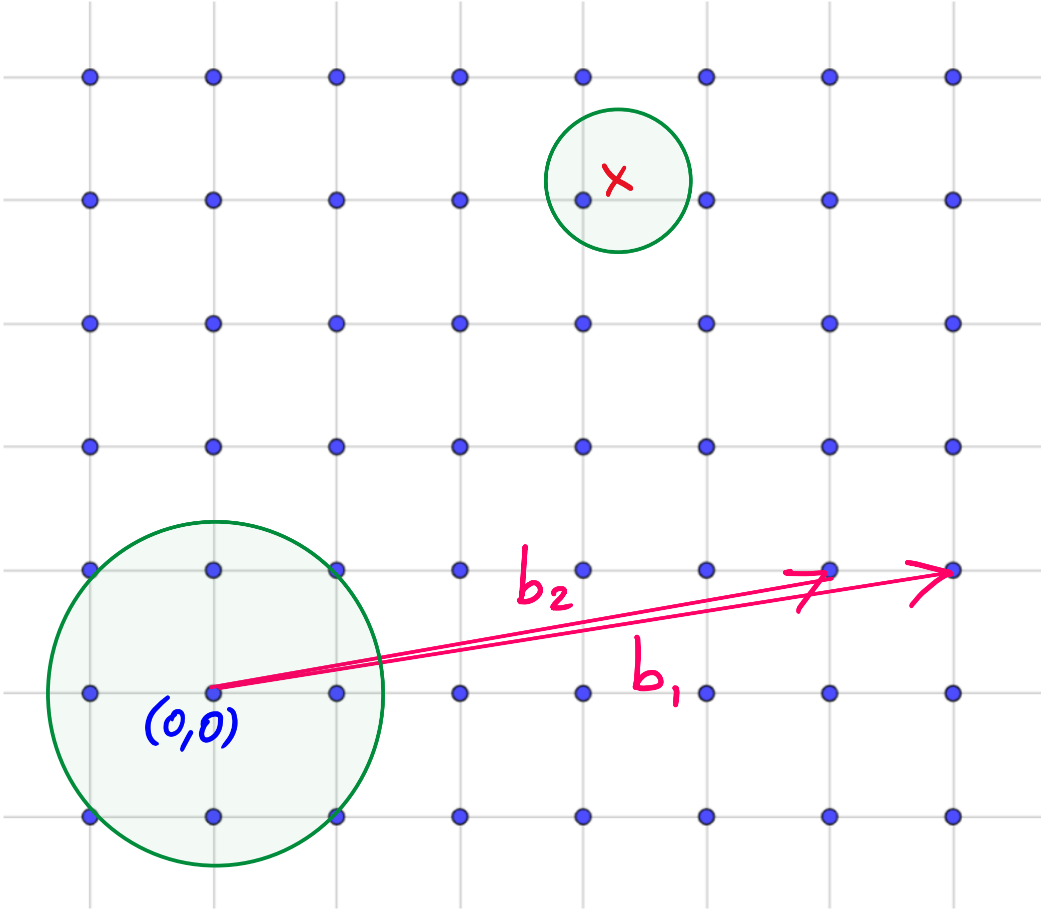


Cryptographie à base de réseaux Euclidiens

$$\mathcal{L} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \middle| (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

Nouveaux problèmes « durs » pour remplacer la factorisation :

- Trouver un vecteur court
- Trouver un point du réseau proche d'un point donné
- Trouver une base de vecteurs courts



Et en pratique ?

Contraintes d'efficacité

$n \approx 1000$ (C'est gros)

Il faut choisir des réseaux spéciaux issus de la théorie algébrique des nombres.

De nouvelles faiblesses à exploiter ?

Choisir les bons paramètres

Protocole crypto

est au moins aussi dur que

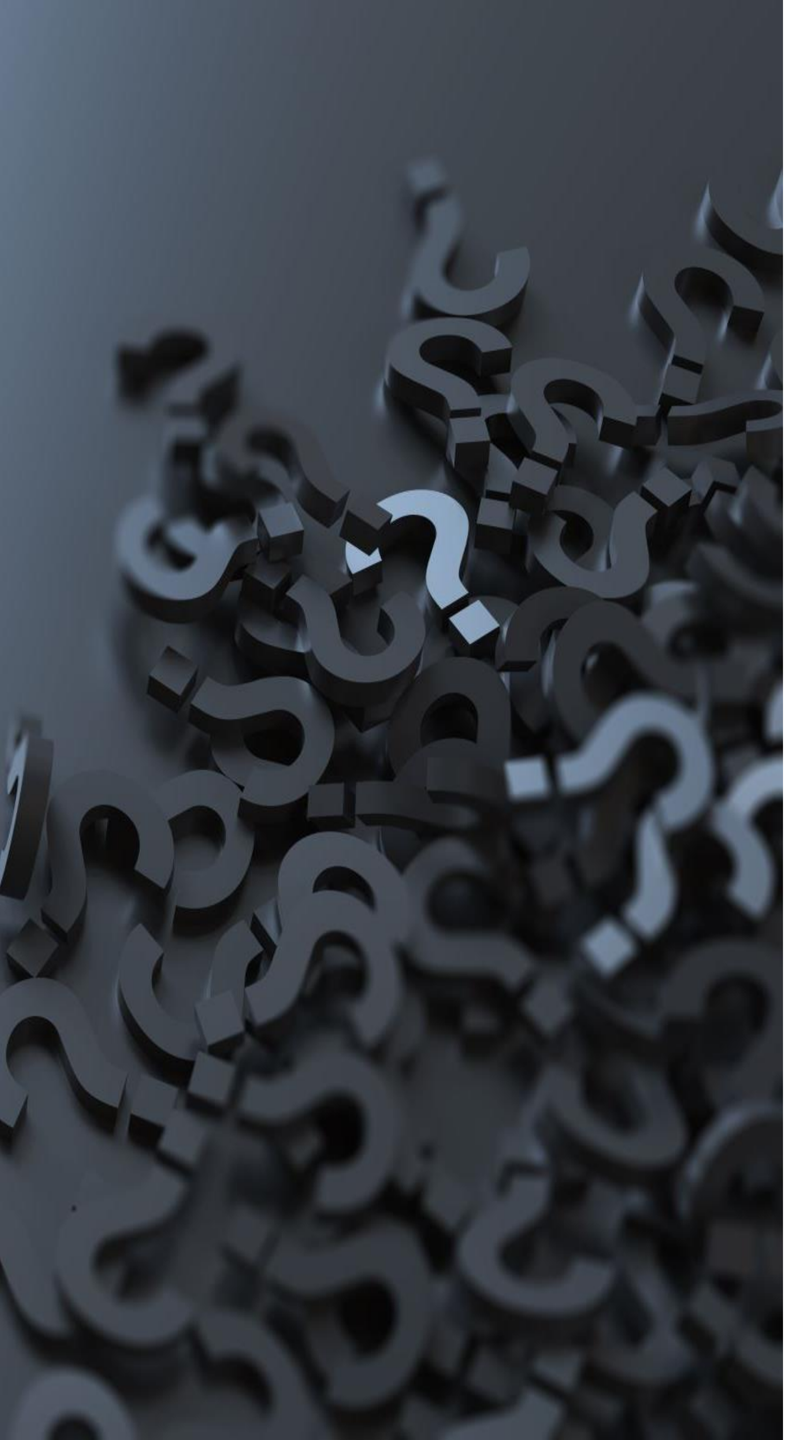
Problème mathématique (plus court vecteur)

se résoud avec

Meilleur algorithme (attaque)

affecte les para-mètres

Des questions ?

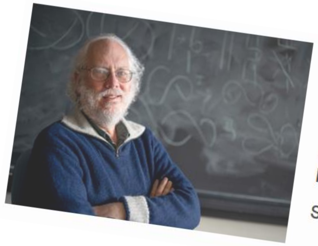


NEWS | 06 January 2023

Are quantum computers about to break online privacy?

IBM dévoile un processeur quantique record, avec 433 qubits au compteur

8,6 Md$ dépensés en projets d'in matique
quantique en 2027



Peter Shor wins Breakthrough Prize in Fundamental Physics

MIT professor to share $3 million prize with three others; Daniel Spielman PhD '95 wins Breakthrough Prize in Mathematics.

September 22, 2022

Who's winning the quantum computing race? China and the U.S. are neck and neck